MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2 Marzo 2015

Teorema di Tonelli $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile,

$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile e $\int_E |f|\,dx < +\infty$ allora per p.o. $y \in \mathbb{R}^k$
$\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$
$f(y,\cdot)$ è misurabile e $E_y = \{z \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (y,z) \in E\}$ è misurab.

$y \to \int_{E_y} f(y,z)\,dz$ è misurabile $\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{E_y} f(y,z)\,dz \right) dy$

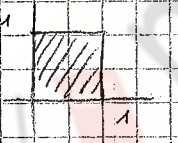
$E = A \times B$ $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \in \mathbb{R}^{n-k}$ **Corollario (di Fubini)** $\int |f| < +\infty \Rightarrow A \times B$

$$\int_{A\times B} f\,dy\,dz = \int_A dy \int_B f(y,z)\,dz = \int_B dz \int_A f(y,z)\,dy$$ → vale solo se $\exists$ l'integ. del modulo

(es) $\int_{[0,1]^2} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx \right) = \frac{\pi}{4}$ $\int_{A\times B} |f| < +\infty$

Controesempio al Th di Fubini poiché non è integrabile nel quadrato

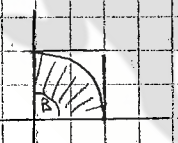
$= \int_0^1 dx \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \right) = -\frac{\pi}{4}$



Ma possiamo considerare un caso in cui ha simmetria sferica! → considerando il modulo la funzione è + piccola ed il dominio è minore.

$\int_{[0,1]^2} \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} \right| dx\,dy \overset{?}{=} \int_{B[0,1] \cap [0,1]^2} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy =$

$= \int_0^1 \frac{1}{\rho} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^2\vartheta - \sin^2\varphi|\,d\varphi \right) d\rho = +\infty$



Quindi verificheremo nei prossimi esempi che la funzione sia integrabile e riduremo la funzione stessa.

$\int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(x^2+y^2)}\,dx}_{a} - 2 \underbrace{\int_0^1 \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx}_{b} \Big) dy \overset{\text{sostituz. } (x=yt)}{=} \int_0^1 \Big(\underbrace{\frac{1}{y} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{1}{(1+t^2)}\,dt}_{a} -$

$- \underbrace{\frac{2}{y} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt}_{b} \Big) dy = \dots = -\arctan(-1)$

Aggiungiamo e sottraiamo t^2 (traccia per farlo)

$\int_0^\lambda \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^\lambda \frac{1}{(1+t^2)}\,dt - \int_0^\lambda \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt =$

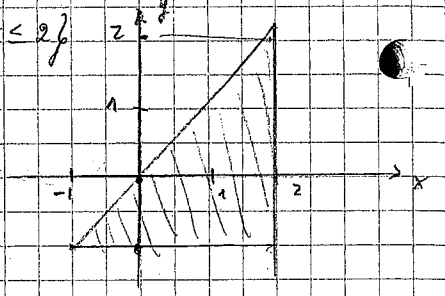
$= \arctan\lambda + \int_0^\lambda + D\left[\frac{(1+t^2)^{-1}}{2} \right] =$

$= \frac{\arctan\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempi: •) $\int_E \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ visto che la funzione è non negativa, possiamo, per il th di Tonelli, cambiare l'ordine

chi è? è l'insieme: $E = \{(x,y) \mid -1 \le y \le x \le 2\}$



In generale l'integrabilità è una domanda a parte.

$\int_E \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| dx\,dy$ ma dalla regola del quadrato del binomio sappiamo che: $|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2}$

Inoltre se: $(x,y) \in E \Rightarrow |x|,|y| \le 2$ $\quad \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{2}$

quindi la funzione è LIMITATA in un dominio limitato.

$$\int_E \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| dx\,dy \le \sqrt{2}\, m_2(E) < +\infty$$

Proposizione: f e E — $\mathbb{R}$ è misurabile, $E \subset \mathbb{R}^m$ $\quad \sup_E |f| \le M < +\infty$

$m(E) < +\infty \Rightarrow \int_E |f| \le M\, m(E) < +\infty$

Ma la sostanza è che la funzione è integrabile!

Ora facciamo gli integrali iterati (abbiamo Fubini) — fissiamo la x, la y $\quad -1 \le y \le x \le 2$

$$\int_{-1}^{2} x\,dx \int_{-1}^{x} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy = \int_{-1}^{2} x \left(\int_{-1}^{x} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} x \left(\int_{-1}^{x} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2}\,dy\right) dx = \int_{-1}^{x} x \left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_{y=-1}^{y=x} dx =$$

(derivata)

considerando la x come una costante perché stiamo integrando in y.

$$= \int_{-1}^{x} x\left(\sqrt{2x^2} - \sqrt{1+x^2}\right) dx = \sqrt{2}\underbrace{\left(\int_{-1}^{2} x|x|\,dx\right)}_{\text{accorpiamo: la funzione è dispari}} - \int_{-1}^{2} x\sqrt{1+x^2}\,dx =$$

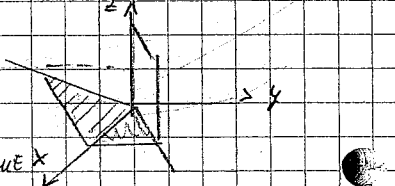
la $\sqrt{x^2} = |x|$ (!)

$$= \sqrt{2}\int_{1}^{2} x^2\,dx - \int_{-1}^{2} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \sqrt{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left[\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{\sqrt{2}\,7}{3} - \frac{\left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)}{3}$$

In questo caso con le coordinate polari avremo semplificato l'integranda, ma anche il dominio di integrazione! $\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right.$ con le coord. polari avremo semplificato e diviso$)$

•) ce un po' più difficile. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

il D_f è l'intersezione tra due cilindri a base triangolare.



$E \subset [0,1]^3 = Q$

integrabilità e calcolo di $f(x,y,z) = (\log y)\sqrt{x^2-z^2}\,e^x$

la funzione non è limitata sull'insieme E. (y è libero di andare nell'origine, dove $\log(0) = -\infty$)

Ma la funzione è sempre non negativa $\Rightarrow$ possiamo applicare Tonelli

$\int_E |\log y| \sqrt{x^2-z^2}$ in questo caso, $f = -f^-$ $\Rightarrow$ $\int f^- < +\infty \Rightarrow \int_E f = -\int_E |f|$

quindi $\int_E (\log y) \sqrt{x^2-z^2}$ questo integrale ha sempre segno negativo $\Rightarrow$ ha sempre $-\infty$ (come le serie $\Rightarrow$ convergono a 0 oppure divergono a $\pm\infty$)

proprio per questo motivo stiamo tranquille e possiamo calcolare l'integrale.

Ciò nonostante studiamo l'integrabilità (anche se in questo caso non sarebbe necessario)

$\int_E |\log y| \sqrt{x^2-z^2}\, dx\,dy\,dz \le \int_E |\log y| \le \int_Q |\log y|\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^1 (\log y)\, dy =$

$\sqrt{x^2-z^2} \le 1$ — ci liberiamo della radice — ora è una funzione perfettamente definita sul cubo

$= \int_0^1 |\log y|\, dy = -\int_0^1 \log y\, dy < +\infty$ (improprio in $y=0$)

Sapendo ora che è integrabile, possiamo fare gli integrali interati

$\int_E \log y \sqrt{x^2-z^2}\, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \left(\int_0^x \sqrt{x^2-z^2}\, dz \right) \left(\int_0^x (\log y)\, dy \right) =$ — con cambio di variabile $z = xt$ —

$= \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt \right) \left[y \log y - y \right]_{y=0}^{y=x} =$

derivo per parti: primitiva: $y \log y - y$

$= \int_0^1 x^2 (x \log x - x) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta \right) dx$

per l'altro integrale: $t = \sin\theta$

Ma questo integrale è: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos(2\theta))}{2}\, d\theta = \left(\frac{\pi}{4}\right)$

per le formule di duplicazione

Quindi otteniamo:

$\int_E f = \left(\frac{\pi}{4}\right) \int_0^1 (x^3 \log x - x^3)\, dx =$ che possiamo vedere con l'integrazione per parti:

$x^3 \log x = \left(D\left(\frac{x^4}{4}\right)\right) \log x$

$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{x^4}{4} \log x - \frac{x^3}{4} \right]_0^1 - \frac{\pi}{16} =$ la primitiva è: $\frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^3}{4}$

$= \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{4} \right) - \frac{\pi}{16} = -\frac{\pi}{8} < +\infty$ quindi come avevamo capito prima è un numero finito e negativo.

6) (es) per casa: $E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le x \le 2,\ 0 \le y \le x \}$

prima di stimare sul cubo, fare la stima intermedia!! (Suggerimento)

7) $E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 2,\ y^2+z^2 \ge 1+x^2 \}$

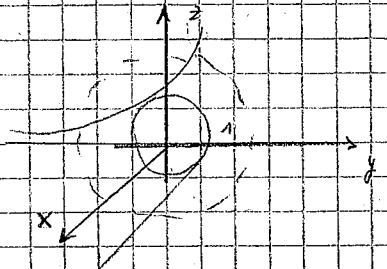
Calcola il momento di inerzia di questo insieme — occorre vedere se ha una simmetria x rotazione dall'asse x $\Rightarrow$ ha come distanza da x $\sqrt{y^2+z^2}$

Per vederlo basta fare una sezione — es $y=0$

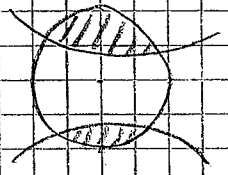
$|z| \ge \sqrt{1+x^2}$ $(y=0)$

$z \ge \sqrt{1+x^2}$

$z \le -\sqrt{1+x^2}$



potrebbe capitare anche un insieme vuoto!



$I = \int_E r^2\, dm$ — r = distanza, momento di inerzia $= r^2 \cdot 1\, dx\,dy\,dz$ quindi nel linguaggio analitico abbiamo:

$$\int_E r^2\, dm = \int_E r^2 \cdot 1\, dx\,dy\,dz = \int_E (y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz$$

Possiamo calcolare questo integrale in molti modi → es. cambio di coordinate sferiche

$$\int_E (y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{E_x} (y^2+z^2)\, dy\,dz$$

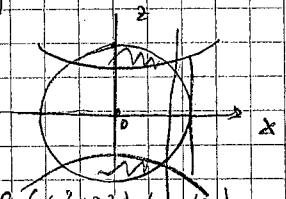
integrando rispetto alla x ⇒ Th di Tonelli → $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ se $|x|$ è + grande di $\sqrt{2}$ non starebbe in questo insieme

Ora la prima verifica che dobbiamo fare è vedere quando l'insieme $E_x \neq \emptyset$ (dal vivo)

Quando $\boxed{E_x \neq \emptyset}$ ⇒ le due disuguaglianze sono verificate: $y^2+z^2 \le 2-x^2$

$\Rightarrow 1+x^2 \le 2-x^2$ $\quad 1+x^2 \le$

$\Rightarrow |x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ quindi cambiamo gli estremi



Notiamo anche che E_x è pari

$$\int_E (y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{E_x} (y^2+z^2)\, dy\,dz = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\iint_{E_x} (y^2+z^2)\, dy\,dz \right) =$$

Quindi abbiamo una corona circolare. Ora utilizziamo le coordinate POLARI $= 2\cdot 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int \rho^3\, d\rho \right) dx =$

$\rho = \sqrt{2-x^2}$ $\quad \sqrt{1+x^2} \le \rho \le \sqrt{2-x^2}$

$$= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\left[\rho^4 \right]_{\rho=\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(2-x^2 \right)^2 - \left(1+x^2 \right)^2 \right)$$

che continuiamo arrivando al risultato

•) es per casa: $\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2}\, dx = \pi^{\frac{m}{2}}$ e $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$

•) $\int_D (x^2 y - y^3)\, dx\,dy$ con $D = \{(x,y) \mid -1 \le x+y \le 1,\ -1 \le y \le 3\}$

ora cambiamo la variabile e vediamo ad ottenere che il dominio stesso è limitato. facciamo subito il cambiamento di variabile → $x-y = \xi$ $\quad x = \eta + \xi$ $\quad (x,y) = F(\xi,\eta)$

$\int_D y(x^2-y^2)\, dx\,dy =$ con il cambio ⇒ $y = \eta$ $\quad y = \eta$ $\quad F(\xi,\eta) = (\eta+\xi, \eta)$

$$= \int_{\tilde{D}} \eta\, \xi \left(\xi + 2\eta \right) d\xi\, d\eta = \int_{-1}^{1} d\xi \int_{-1}^{3} d\eta \left(\eta\, \xi^2 + 2\, \xi\, \eta^2 \right) =$$

con $\tilde{D} = \{(\xi,\eta) \mid -1 \le \xi \le 1,\ -1 \le \eta \le 3\} = \underbrace{[-1,1] \times [-1,3]}_{\text{i domini sono prodotto}}$

$$= 2 \left(\int_0^1 \xi^2\, d\xi \right) \left(\int_1^3 \eta\, d\eta \right) + 2 \left(\int_{-1}^{1} \xi\, d\xi \right) \left(\int_{-1}^{3} \eta^2\, d\eta \right)$$

per l'integrale di una funzione dispari

$$= \frac{8}{3}$$

Nelle nuove variabili non abbiamo problemi di integrabilità → se lo è con variabili iniziali lo è sempre (è un se e solo se) ← con quelle nuove

a) $f(x,y) = (x^7y^5 + x^3y^2 + x^2y^2)\underbrace{e^{-x^2-y^2}}$ 1) integrabilità in $\mathbb{R}^2$

l'esponenziale all'∞ "ammazza" i polinomi e rende tutto integrabile. 2) calcolo di $\int_{\mathbb{R}^2} f$ (se integrabile)

Ora vogliamo verificare che: $\int_{\mathbb{R}^2} |f| < +\infty$

Sappiamo che $\int_{\mathbb{R}^2} |f| \le \int_{\mathbb{R}^2} \left(|(x,y)|^{12} + |(x,y)|^5 + |(x,y)|^4 \right) e^{-x^2-y^2} =$

poiché $|x|, |y| \le |(x,y)|$ $= 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^{13} e^{-\rho^2} d\rho + 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^6 e^{-\rho^2} d\rho + \int_0^{+\infty} \rho^5 e^{-\rho^2} d\rho$

$\int_0^{+\infty} \rho^k e^{-\rho^2} < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$

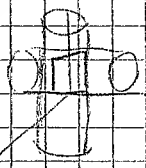
$\int_{\mathbb{R}^2} f\,dx\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}} x^7 e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} y^5 e^{-y^2} dy\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} x^3 e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-y^2} dy\right) +$

0 — poiché è una funzione dispari $+ \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx\right)^2$

5 Marzo 2015

Intersezione di due cilindri pieni di raggio r

a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+y^2 \le r^2,\ x^2+z^2 \le r^2\}$ con $r > 0$



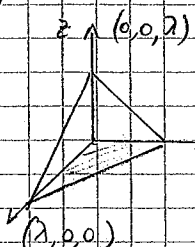
$m_3(E) = \int_{-r}^{r} dx \int_{E_x} dy\,dz = \int_{-r}^{r} 4(r^2-x^2)\,dx = 8$

$E_x = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } |y| \le \sqrt{r^2-x^2},\ |z| \le \sqrt{r^2-x^2}\} = \left[-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}\right] \times \left[-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}\right]$

$\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = 8\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{16}{3} r^3$

b) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \ge 0,\ x+y+z \le \lambda\}$ ← parametro

↓ è un tetraedro



$\int_E z^\alpha\,dx\,dy\,dz = \int_0^\lambda dx \int_0^{\lambda-x} dy \int_0^{\lambda-x-y} z^\alpha dz =$

con $z^\alpha \ge 0$

Se x è fissato y può solo variare così: $0 \le y \le \lambda - x$ ugualmente ora x e y fissati (applichiamo Tonelli)

$= \int_0^\lambda dx \int_0^{\lambda-x} dy \left[\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^{\lambda-x-y} = \int_0^\lambda dx \int_0^{\lambda-x} \frac{(\lambda-x-y)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}\,dy =$

$= \int_0^\lambda dx \left[\frac{(\lambda-x-y)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]_0^{\lambda-x} =$ è la primitiva (Analisi I) (già fatta)

↓ inverto l'ordine per eliminare il (−)